全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品
高考复习方案

主编：肖德好

北京专版

听课手册

数学

RJB

AI智慧教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

延边教育出版社

CONTENTS 目录

讲课智能体

扫码添加全品伴学师
获取学习服务

01 第一单元　集合与常用逻辑用语

第 1 讲　集合 …… 001

第 2 讲　常用逻辑用语 …… 005

02 第二单元　不等式

第 3 讲　等式与不等式 …… 009

第 4 讲　均值不等式及其应用 …… 012

第 5 讲　一元二次不等式及其解法 …… 015

03 第三单元　函数

第 6 讲　函数的概念及其表示 …… 019

第 7 讲　函数的单调性和最值 …… 023

第 8 讲　函数的奇偶性与周期性 …… 027

第 9 讲　二次函数与幂函数 …… 031

第 10 讲　指数与指数函数 …… 036

第 11 讲　对数与对数函数 …… 040

第 12 讲　函数的图象 …… 046

第 13 讲　函数与方程 …… 050

第 14 讲　函数模型及其应用 …… 053

04 第四单元　导数

第 15 讲　导数的概念及其运算 …… 058

第 16 讲　导数与函数的单调性 …… 062

第 17 讲　导数与函数的极值、最值 …… 067

培优专题一　导数 …… 072

第 1 课时　导数与不等式恒(能)成立问题 …… 072

第 2 课时　导数与函数的零点 …… 076

第 3 课时　隐零点问题 …… 080

05 第五单元 三角函数与解三角形

第 18 讲 任意角和弧度制以及任意角的三角函数 …… 083
第 19 讲 同角三角函数的基本关系式与诱导公式 …… 087
第 20 讲 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 …… 091
第 21 讲 简单的三角恒等变换 …… 094
第 22 讲 三角函数的图象与性质 …… 098
第 23 讲 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$及三角函数模型的应用 …… 102
第 24 讲 余弦定理、正弦定理 …… 109
培优专题二 **解三角形综合应用** …… 114

06 第六单元 数列

第 25 讲 数列的概念与简单表示法 …… 118
第 26 讲 等差数列及其前 n 项和 …… 122
第 27 讲 等比数列及其前 n 项和 …… 126
第 28 讲 数列求和 …… 130
培优专题三 **数列综合** …… 134

07 第七单元 平面向量与复数

第 29 讲 平面向量的概念及其线性运算 …… 138
第 30 讲 平面向量基本定理及坐标表示 …… 142
第 31 讲 平面向量的数量积 …… 144
第 32 讲 复数的概念及运算 …… 149

08 第八单元 立体几何

第 33 讲 空间几何体的结构特征、表面积和体积 …… 152
第 34 讲 空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 158
第 35 讲 直线、平面平行的判定及性质 …… 162
第 36 讲 直线、平面垂直的判定及性质 …… 168
第 37 讲 空间向量及其运算 …… 173
第 38 讲 空间角 …… 178
第 39 讲 空间距离 …… 183
培优专题四 **立体几何** …… 186

09 第九单元　平面解析几何

第 40 讲　直线的倾斜角与斜率、直线的方程 …… 190
第 41 讲　两直线的位置关系 …… 193
第 42 讲　圆的方程 …… 197
第 43 讲　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 201
第 44 讲　椭圆 …… 205
第 45 讲　双曲线 …… 210
第 46 讲　抛物线 …… 214
第 47 讲　直线与圆锥曲线的位置关系 …… 218
培优专题五　**圆锥曲线** …… 222
第 1 课时　定点、定值及共线问题 …… 222
第 2 课时　最值及范围问题 …… 225
第 3 课时　证明及探索性问题 …… 229

10 第十单元　排列与组合、二项式定理、概率

第 48 讲　两个计数原理、排列与组合 …… 233
第 49 讲　二项式定理 …… 238
第 50 讲　随机事件与概率、古典概型 …… 241
第 51 讲　随机事件的独立性、条件概率与全概率公式 …… 246
第 52 讲　离散型随机变量及其分布 …… 249
第 53 讲　二项分布、超几何分布、正态分布 …… 255

11 第十一单元　统计

第 54 讲　随机抽样 …… 261
第 55 讲　用样本估计总体 …… 266
培优专题六　**概率与统计** …… 272
第 56 讲　统计模型 …… 277

作业手册　[单独成册 P283～P440]
参考答案（听课手册＋作业手册）　[单独成册 P441～P600]

第一单元　集合与常用逻辑用语

第 1 讲　集合

【课标要求】 1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用维恩图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

讲课智能体

课前基础巩固

知识聚集

1. 集合及其表示方法

(1)集合元素的性质:________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系:①属于,记为________;②不属于,记为________.

(3)集合的表示方法:列举法、________、________________和区间法.

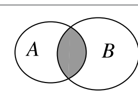
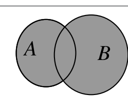
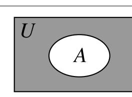
(4)常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	________	________	________	________	________

2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合 A 中____________都是集合 B 中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$ 或________
真子集	集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中________有一个元素不属于 A	①$A\subseteq B$; ②$\exists x\in B,x\notin A$	A________B 或 $B\supsetneqq A$
相等	集合 A,B 中的元素完全________	$A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$	________
空集	________任何元素的集合,空集是任何集合的子集	①$\forall x,x\notin\varnothing$;②$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

3. 集合的基本运算

运算＼表示	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于集合 A________属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,________$x\in B\}$		________
并集	由所有属于集合 A________属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,________$x\in B\}$		________
补集	全集 U 中________属于集合 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,且 x________$A\}$		________

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质：$A\cap B=B\cap A$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A$________$B$.

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$________；$\complement_U(\complement_U A)=$________；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$________$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数：集合 A 中有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.

2. 子集的传递性：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(真子集也满足).

3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow(\complement_U A)\supseteq(\complement_U B)$.

4. 集合元素个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(常用在实际问题中).

课前演练

1. 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$，若 $6\in A$，则实数 x 的值为________.

2. 已知集合 $C=\{(x,y)\mid y=x\}$，集合 $D=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5\end{cases}\right\}$，则集合 D 用列举法表示为________，且 C________D(从"$=$""$\subseteq$""$\supseteq$"中选一个合适的填入).

3. 已知集合 $U=\{x\mid |x|>1\}$，$A=\{x\mid x\geqslant 2\}$，则 $\complement_U A=$________.

4. 已知集合 $\{1,a\}=\{a,a^2\}$，则实数 $a=$________.

5. 已知集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的所有可能取值组成的集合为________.

课堂考点探究

探究点一 集合的概念

例 1 [2025·北京二十中测试] 已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，若 $1\in A$，则 a 的取值集合为(　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,-1\}$　　D. $\{-1\}$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

研究集合问题关键有三点：一是要明确构成集合的元素是什么；二是看元素满足的限制条件是什么；三是根据元素特征构造关系式解决相应问题. 注意：含有字母的集合，在求出字母的值后，要注意检验集合中的元素是否满足互异性.

对点演练1

1. [2023·东城一模] 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2<0\}$，且 $a\in A$，则 a 可以为(　　)

A. -2　　B. -1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，已知集合 $\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$，则 $(a+b)^{2026}=$________.

探究点二　集合间的基本关系

例 2-1　在下列选项中，能正确表示集合 $A=\{-3,0,3\}$ 和 $B=\{x|x^2+3x=0\}$ 的关系的是(　　)

A. $A=B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $A\subseteq B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

例 2-2　已知集合 $A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则(　　)

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{Z}$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

(1)若 $B\subseteq A$，则应分 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况讨论.

(2)已知两个集合间的关系求参数时，关键是将两个集合间的关系转化为元素或区间端点间的关系，进而转化为参数满足的关系.解决这类问题常常要合理利用数轴、维恩图，化抽象为直观进行求解.

对点演练2

1. [2025·北京清华大学附中测试] 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2>0\}$，$N=\{x|x^2>a\}$，若 $N\subseteq M$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $(1,2)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

2. [2023·西城期末] 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|0<x<5\}$，则满足条件 $A\subseteq M\subseteq B$ 的集合 M 的个数为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

探究点三　集合的基本运算

》角度 1　集合的运算

例 3-1 [2025·海淀二模] 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|a<x<2\}$.若 $a\in\mathbf{Z}$，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $a=$(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

例 3-2 [2022·北京卷] 已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$(　　)

A. $(-2,1]$　　B. $(-3,-2)\cup[1,3)$

C. $[-2,1)$　　D. $(-3,-2]\cup(1,3)$

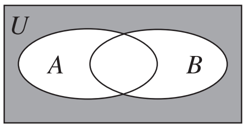
[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

对于已知集合的运算，可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解，必要时可结合数轴以及维恩图求解.

对点演练3

1. [2024·东城一模] 如图所示，U 是全集，A，B 是 U 的子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)



A. $A\cap B$　　B. $A\cup B$

C. $\complement_U(A\cap B)$　　D. $\complement_U(A\cup B)$

2. [2025·延庆一模] 已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|\log_3 x<1\}$,则 $A\cup B=$(　　)

A. $[0,3]$　　B. $[0,3)$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,3]$

》角度 2　利用集合的运算求参数的值(范围)

例 4 [2025·海淀期末] 已知关于 x 的不等式 $|x-a|\leqslant 2$ 的解集为 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$,集合 $B=\{x|m-3\leqslant x\leqslant m+3\}$.

(1)求实数 a 的值.

(2)从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求实数 m 的取值范围.

条件①:$[-2,4]\subseteq(A\cup B)$;

条件②:$A\cap B=A$.

注:如果选择多个条件分别作答,按第一个解答计分.

◆◆ 总结反思

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1)与不等式有关的集合,一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到;

(2)若集合中的元素能一一列举,则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系,再列方程(组)求解.

对点演练4

[2025·石景山期末] 已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$,$B=\{x|x<-2$ 或 $x>6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围;

(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的取值范围.

探究点四　集合语言的运用

例 5 [2025·朝阳期中] 数学家康托尔创立了集合论,集合论的产生丰富了现代计数方法.记 $|S|$ 为集合 S 的元素个数,$\varphi(S)$ 为集合 S 的子集个数,若集合 A,B,C 满足① $|A|=99$,$|B|=100$;② $\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)=\varphi(A\cup B\cup C)$.则 $|A\cap B\cap C|$ 的最大值是(　　)

A. 99　　B. 98　　C. 97　　D. 96

[课堂笔记]

◆◆ **总结反思**

以集合语言为背景的新定义问题,需正确理解新定义(即分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚),转化成熟知的数学情境,并能够应用到具体的解题过程中,这是破解新定义集合问题的关键所在.

对点演练5

1. 已知U是非空数集,若非空集合A_1,A_2满足以下三个条件,则称(A_1,A_2)为集合U的一种真拆分,并规定(A_1,A_2)与(A_2,A_1)为集合U的同一种真拆分.

①$A_1\cap A_2=\varnothing$;②$A_1\cup A_2=U$;③$A_i(i=1,2)$的元素个数不是A_i中的元素.

则$U=\{1,2,3,4,5,6\}$的真拆分的种数是(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 10　　D. 15

2. [2025·房山调研] 已知由正整数组成的集合$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{50}\}$,$S(A)$表示集合$A$中所有元素的和,$E(A)$表示集合$A$中偶数的个数.若$S(A)=2025$,则$E(A)$的最小值为(　　)

A. 5　　B. 7

C. 9　　D. 10

第2讲　常用逻辑用语

【课标要求】 1. 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义,理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.

2. 理解全称量词与存在量词的意义,能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定,能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

讲课智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的______条件,q 是 p 的______条件	
p 是 q 的________条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的______条件	$p\Leftrightarrow q$
p 是 q 的________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作________,用符号“______”表示.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作________,用符号“______”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定:

全称量词命题:$\forall x\in M,p(x)$,它的否定是__________.

存在量词命题:$\exists x\in M,p(x)$,它的否定是__________.

3. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是

正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

课前演练

1. 已知 $p:a\in P\cup Q$，$q:a\in P$，则 p 是 q 的________(填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”)条件.
2. 命题“任意两个等边三角形都相似”是________量词命题，它的否定是________________，并且是________(填“真”或“假”)命题.
3. 已知△ABC 的三边的长分别为 a,b,c，且 $a\leqslant b\leqslant c$，那么“$a^2+b^2=c^2$”是“△ABC 为直角三角形”的________(填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”)条件.
4. 已知 $p:x<a$，$q:x-2\leqslant 0$.
   ①若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是________；
   ②若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.
5. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 的________(填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”)条件.

课堂考点探究

探究点一　充分条件与必要条件

》角度 1　充分条件与必要条件的判断

例 1-1 [2025·西城期末] 已知集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4m+6n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 1-2 [2025·丰台二模] 已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的两实根为 x_1,x_2，则“$|x_1|=|x_2|$”是“关于 x 的不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[课堂笔记]

◆◆ **总结反思**

充分条件、必要条件的两种判定方法

(1)定义法：适用于定义、定理的判断问题；

(2)集合法：多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

对点演练1

1. 若 $xy\neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的(　　)

   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

   C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. [2025·北京卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$”的(　　)

   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

   C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

角度 2　充分条件与必要条件的应用

例 2　已知 $p:|x-3|<5,q:1-a<x<2a-3$，且 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是________.

[课堂笔记]

总结反思

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上，解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系，然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解.解题过程中要注意检验区间的端点值.

对点演练2

已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$，若 $x\in A$ 的一个必要条件是 $x\geqslant a$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $a<0$　　B. $a\geqslant 2$

C. $a\leqslant -1$　　D. $a\geqslant -1$

探究点二　全称量词命题与存在量词命题

角度 1　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例 3　下列命题中为假命题的是(　　)

A. $\exists x\in \mathbf{R},\sin x\geqslant 1$

B. "$\forall x\in \mathbf{R},x^2+1>0$"的否定为"$\exists x\in \mathbf{R},x^2+1<0$"

C. $\forall x\leqslant 0,e^x\leqslant 1$

D. "$\exists x\in \mathbf{R},\sqrt{x^2}\neq x$"的否定为"$\forall x\in \mathbf{R},\sqrt{x^2}=x$"

[课堂笔记]

总结反思

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法：

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假
	假	所有对象使命题为假	否定为真

对点演练3

[2025·西城期末] 已知命题 $p:\exists x<0,x^2=-x$；命题 $q:\forall x\in \mathbf{R},|x+1|\geqslant 1$. 则(　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. p 和 q 都是假命题

C. p 是真命题，q 是假命题

D. p 是假命题，q 是真命题

角度 2　全称、存在量词命题的否定

例 4 [2025·石景山期末] 已知命题 p：$\forall x>0$，$\ln x>0$，那么命题 $\neg p$ 为(　　)

A. $\exists x>0$，$\ln x\leqslant 0$　　B. $\forall x>0$，$\ln x<0$

C. $\exists x>0$，$\ln x<0$　　D. $\forall x>0$，$\ln x\leqslant 0$

[课堂笔记]

总结反思

全称量词命题与存在量词命题的否定：

①改写量词：确定命题所含量词的类型，省去量词的要结合命题的含义加上量词，再对量词进行改写.

②否定结论：对原命题的结论进行否定.

对点演练4

[2026·北京人大附中测试] 已知命题 p：$\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 至少有 1 解，则 $\neg p$ 为(　　)

A. $\forall c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

B. $\forall c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 至多有 1 解

C. $\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 至多有 1 解

D. $\exists c\leqslant 0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

角度 3　全称、存在量词命题的应用

例 5 [2025·北京交大附中测试] 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+a\leqslant 0$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$

[课堂笔记]

总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤：

(1)根据题目条件，推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况)；

(2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围；

(3)根据每个命题的真假情况，求出参数的取值范围.

对点演练5

[2025·北京八一学校测试] 已知 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$(m+1)(x^2+1)\leqslant 0$，q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-mx+1>0$. 若 p 和 q 中至多有一个为真命题，则实数 m 的取值范围为(　　)

A. $[2,+\infty)$

B. $(-1,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$

第3讲　等式与不等式

讲课智能体

【课标要求】　梳理等式的性质，理解不等式的概念，掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法 $\begin{cases} a-b>0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b, \\ a-b=0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b, \\ a-b<0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b. \end{cases}$

(2)作商法

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0), \\ \dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a,b\neq0), \\ \dfrac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0). \end{cases}$$

2. 等式的性质

(1)如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

(2)如果 $a=b$，那么 $a+c$______$b+c$，$a-c$______$b-c$.

(3)如果 $a=b$，那么 ac______bc，$\dfrac{a}{c}$______$\dfrac{b}{c}(c\neq0)$.

3. 不等式的性质

性质	内容
可加性	如果 $a>b$，那么 $a+c$_____$b+c$
可乘性	如果 $a>b$，$c>0$，那么 ac_____bc
	如果 $a>b$，$c<0$，那么 ac_____bc
传递性	如果 $a>b$，$b>c$，那么______
对称性	$a>b\Leftrightarrow b<a$

4. 不等式性质的推论

推论	内容
移项法则	如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$
同向不等式相加	如果 $a>b$，$c>d$，那么______
同向不等式相乘	如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么______
可乘方性	如果 $a>b>0$，那么______$(n\in\mathbf{N},n>1)$
可开方性	如果 $a>b>0$，那么$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

◆◆ 常用结论

1. 若 $a<x<b$，$c<y<d$，则 $a-d<x-y<b-c$.

2. 若 $\frac{a}{b}<1$，$a,b,m>0$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$；若 $\frac{a}{b}>1$，$a,b,m>0$，则 $\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}>1$.

课前演练

1. 设 $t=a+2b$，$s=a+b^2+1$，则 s 与 t 的大小关系是________.

2. 已知 $2<a<3$，$-2<b<-1$，则 $2a+b$ 的取值范围为________.

3. 下列命题中为真命题的是________.（填序号）

①若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$；②若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$；

③若 $a>b>0$ 且 $c<0$，则 $\frac{c}{a^2}>\frac{c}{b^2}$；④若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $ab<0$.

4. 已知 $-1<x<4$，$2<y<3$，则 $x-y$ 的取值范围是________.

5. 已知实数 $a\in(-3,1)$，$b\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$，则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是________.

课堂考点探究

探究点一　比较数（式）的大小

例 1-1　已知 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

例 1-2 [2024·丰台二模] 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则（　　）

A. $\frac{1}{a^2+1}<\frac{1}{b^2+1}$　　B. $a^2b>ab^2$

C. $a^2>ab>b^2$　　D. $a>\frac{a+b}{2}>b$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

(1)判断两个式子大小关系的常用方法：作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2)作差(商)法的一般步骤是：作差(商)，变形，定号，得出结论.

对点演练1

1. [2023·大兴期末] 已知 $M=(a+2)(a-3)$，$N=2a(a-1)$，$a\in\mathbf{R}$，则 M,N 的大小关系是（　　）

A. $M>N$　　B. $M\geqslant N$　　C. $M<N$　　D. $M\leqslant N$

2. 对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，“$a>b$”是“$|a|>b$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

探究点二　不等式的基本性质

例 2 [2024·房山期末] 已知 a,b 均为非零实数，且 $a>b$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

解决不等式有关问题常用的三种方法：

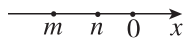
(1)直接利用不等式的性质逐个验证，利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件；

(2)利用特殊值法排除错误答案；

(3)构造函数，利用函数的单调性.

对点演练2

1. [2025·顺义期末] 已知实数 m,n 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是(　　)



A. $m^2>mn>0$　　B. $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$

C. $m-n>0$　　D. $m^2<n^2$

2. [2025·丰台一模] 已知 $a<b,c<d$，则下列不等式恒成立的是(　　)

A. $a-c<b-d$　　B. $ac<bd$

C. $2^a+2^c<2^b+2^d$　　D. $a^2+c^2<b^2+d^2$

探究点三　不等式的应用

» 角度 1　利用不等式的性质求取值范围

例 3 已知 $-1<a<5,-3<b<1$，则下列结论错误的是(　　)

A. $-15<ab<5$　　B. $-4<a+b<6$

C. $-2<a-b<8$　　D. $-\frac{5}{3}<\frac{a}{b}<5$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

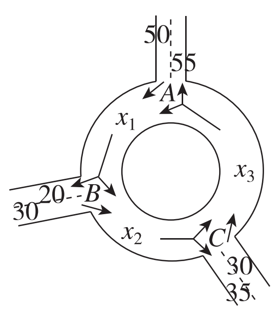
求代数式的取值范围需注意两点：(1)严格运用不等式的性质；(2)利用整体思想，通过“一次性”不等关系的运算求解范围，防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

对点演练3

已知实数 x,y 满足 $-3<x+2y<2,-1<2x-y<4$，则 $x-y$ 的取值范围为________.

» 角度 2　不等式的实际应用

例 4 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型，在某高峰时段，单位时间进出路口 A,B,C 的机动车辆数如图所示，图中 x_1,x_2,x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数(假设：单位时间内，在上述路段中，同一路段上驶入与驶出的车辆数相等)，则(　　)



A. $x_1>x_2>x_3$　　B. $x_1>x_3>x_2$

C. $x_2>x_3>x_1$　　D. $x_3>x_2>x_1$

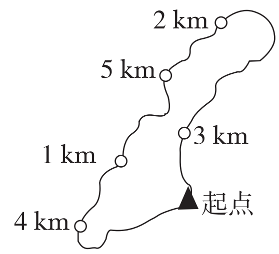
[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

涉及实际问题中的大小比较，根据实际意义设元、列式表示出相关量，再用不等式的相关性质进行比较.

对点演练4

[2023·海淀一模] 刘老师沿着某公园的环形道(周长大于 1 km)按逆时针方向跑步，他从起点出发，并用软件记录了运动轨迹，他每跑 1 km，软件会在运动轨迹上标注出相应的里程数. 已知刘老师共跑了 11 km，恰好回到起点，前 5 km 的记录数据如图所示，则刘老师总共跑的圈数为(　　)



A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

第 4 讲　均值不等式及其应用

【课标要求】 1. 掌握均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b>0)$.

2. 结合具体实例，能用均值不等式解决简单的最大值或最小值问题.

讲课智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)均值不等式成立的条件：____________.

(2)等号成立的条件：当且仅当________时取等号.

(3)数________称为 a,b 的算术平均数；数 $\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

(1) $a^2+b^2\geqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$______$(a,b$ 同号$)$.

(3) $ab\leqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

(4) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 利用均值不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值，是______.(简记：积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值，是______.(简记：和定积最大)

◆◆ 常用结论

1. 若 $a>0,b>0$，则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

2. 当 $x>0$ 时，函数 $y=x+\frac{a}{x}\ (a>0)$ 在 $x=\sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$；当 $x<0$ 时，函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $x=-\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

课前演练

1. 当 $x=$________时，$x^2+\frac{1}{x^2}$取得最小值________.

2. 设 $x>0$，则函数 $y=\frac{x^2+x+25}{x}$的最小值为________.

3. 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园，则当所用篱笆最短时，所用篱笆的长度是______ m；若矩形菜园一边靠墙，墙的长度为 9 m，则当矩形和墙平行的边长为________ m 时，所用篱笆最短.

4. 已知函数 $y=x+\frac{4}{x}+1(x>0)$，那么当 $x=$________时，该函数取得最小值且最小值为________.

5. 当 $x\geqslant2$ 时，$x+\frac{4}{x+2}$的最小值为________.

课堂考点探究

探究点一　直接用均值不等式

例 1 [2023·东城一模] 已知 $x>0$，则 $x-4+\frac{4}{x}$的最小值为(　　)

A. -2　　B. 0

C. 1　　D. $2\sqrt{2}$

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

熟记均值不等式成立的条件，合理选择均值不等式的形式解题，要注意对不等式等号是否成立进行验证.

对点演练1

1. [2025·大兴期末] 已知 $\lg a=-\lg b$，则 $ab=$________，$a+b$ 的最小值为________.

2. [2025·海淀一模] 已知四个数 $a=\frac{\lg 2+\lg 5}{2}$，$b=\sqrt{\lg 2\cdot\lg 5}$，$c=\lg 2$，$d=\lg 5$，其中最小的是(　　)

A. a　　B. b　　C. c　　D. d

探究点二　变形用均值不等式

» 角度 1　配凑法

例 2 [2025·石景山期末] 若 $x>1$，则 $x+\frac{1}{x-1}$的最小值是________.

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

均值不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能，利用均值不等式求最值时，要根据式子的特征灵活变形，先配凑出积、和为常数的形式，再利用均值不等式求解.

对点演练2

1. [2025·延庆期末] 已知 $x<0$,则 $y=1+2x+\frac{2}{x}$ 的最大值为________,当且仅当 $x=$________时,等号成立.

2. 若 $x>1$,则 $\frac{x^2+2x+2}{x-1}$ 的最小值为________.

角度2 常数代换法

例3-1 已知 $x>0,y>0$,且 $2x+y=1$,则 $\frac{x+y}{xy}$ 的最小值为( )

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$

C. 6　　D. $2\sqrt{2}+3$

例3-2 已知正数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,则 $ab+3b$ 的最小值为( )

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12

[课堂笔记]

总结反思

常数代换法主要解决形如"已知 $x+y=t$(t 为常数),求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值"的问题,通常先将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{t}$,再用均值不等式求最值.

对点演练3

已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=2$,则 $\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+1}$ 的最小值是( )

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 9

角度3 消元法

例4 已知正实数 x,y 满足 $x^2+3xy-2=0$,则 $2x+y$ 的最小值为( )

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

[课堂笔记]

总结反思

消元法,即根据条件建立两个量之间的函数关系,然后代入代数式转化为函数的最值求解.有时会出现多元的问题,解决方法是消元后利用均值不等式求解.

对点演练4

[2025·西城期末] 若实数 x,y 满足 $x^2-xy+1=0$,则( )

A. $x^2+y^2\geqslant 5$　　B. $x^2+y^2\leqslant 4$

C. $|x+y|\leqslant 3$　　D. $|x+y|\geqslant 2\sqrt{2}$

探究点三　均值不等式的实际应用

例 5　要制作一个面积为 2 平方米,形状为直角三角形的铁架框,现有下列四种长度的铁管,最合理(够用,又浪费最少)的是(　　)

A. 4.6 米　　B. 4.8 米

C. 6.8 米　　D. 7 米

[课堂笔记]

◆◆ 总结反思

有关函数最值的实际问题的解题技巧

(1)根据实际问题建立函数的解析式,再利用均值不等式求得函数的最值.

(2)设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数.

(3)解应用题时,一定要注意变量的实际意义及其取值范围.

(4)在应用均值不等式求函数最值时,若等号取不到,可利用函数的单调性求解.

对点演练5

某批救灾物资随 41 辆汽车从某市以 v km/h 的速度匀速直达灾区,已知两地公路线长 360 km,为安全起见,两辆汽车的间距不得小于$\frac{v^2}{900}$ km(车长忽略不计),要使这批物资尽快全部到达灾区,则 $v=$(　　)

A. 70　　B. 80　　C. 90　　D. 100

第 5 讲　一元二次不等式及其解法

【课标要求】

1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义.能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

讲课智能体

课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

(1)定义:一般地,我们把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式.

(2)一般形式:$ax^2+bx+c>0$(或$\geqslant 0$),$ax^2+bx+c<0$(或$\leqslant 0$),其中 $a\neq 0$,a,b,c 均为常数.

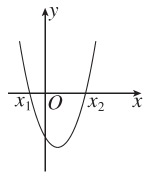
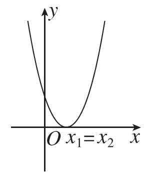
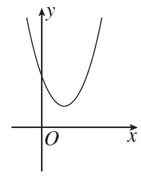
(3)解不等式的有关理论

①使某一个一元二次不等式成立的 x 的值,叫作这个一元二次不等式的解;

②一元二次不等式的所有的解组成的集合,叫作这个一元二次不等式的解集;

③将一个不等式转化为另一个与它解集相同的不等式,叫作不等式的同解变形.

2. 三个“二次”间的关系

项目	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集	________	________	________
$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集	________	________	________

3. 解一元二次不等式的一般步骤

(1)判号:检查二次项的系数是否为正值,若是负值,则利用不等式的性质将二次项系数化为正值.

(2)求根:计算判别式 Δ,求出相应方程的实数根.

①当 $\Delta>0$ 时,求出两根 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$(注意灵活运用因式分解和配方法);

②当 $\Delta=0$ 时,求根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$;

③当 $\Delta<0$ 时,方程无解.

(3)标根:将所求得的实数根标在数轴上(注意两实数根的大小顺序,尤其是当实数根中含有字母时),并画出开口向上的抛物线示意图.

(4)写解集:根据示意图以及一元二次不等式解集的几何意义,写出解集.

口诀:大于零取(根)两边,小于零取(根)中间.

4. 分式不等式

(1)$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$;$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

(2)$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}$$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0,\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

◆◆ 常用结论

1. 绝对值不等式$|x|>a(a>0)$的解集为$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$,绝对值不等式$|x|<a(a>0)$的解集为$(-a,a)$.

2. (1)对于不等式 $ax^2+bx+c>0$,求解时不要忘记讨论 $a=0$ 时的情形;

(2)注意区分 $\Delta<0$ 时,$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的解集为 $\mathbf{R}$ 还是$\varnothing$.

课前演练

1. 不等式 $x^2-5x-6\geqslant 0$ 的解集为__________.
2. 不等式 $x(x+3)<2(x+3)$的解集为________.
3. 若一元二次不等式 $2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 k 的取值范围为________.
4. 若关于 x 的不等式$-x^2+bx+c<0$ 的解集是$\{x\mid x<-3$ 或 $x>4\}$,则关于 x 的不等式 $cx^2-bx-1>0$ 的解集是____________.
5. 若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+1<0$ 有实数解,则 a 的取值范围是________.

探究点一　解一元二次不等式

角度 1　不含参的不等式

例 1-1 [2024·石景山一模] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A. $(-1,3)$　　　　B. $(-3,1)$

C. $(-1,1)$　　　　D. $(1,3)$

例 1-2 下列不等式中解集为$[1,3]$的是(　　)

A. $\dfrac{x-1}{x-3}\leqslant 0$　　　　B. $\dfrac{1-x}{3-x}\geqslant 0$

C. $|x-2|\leqslant 1$　　　　D. $(x-1)(x-3)\geqslant 0$

[课堂笔记]

总结反思

解一元二次不等式的一般步骤是：①化为标准形式($a>0$)；②确定判别式 Δ 的符号，若 $\Delta\geqslant 0$，则求出该不等式对应的一元二次方程的根，若 $\Delta<0$，则对应的一元二次方程无根；③结合二次函数的图象得出不等式的解集. 特别地，若一元二次不等式的左边能因式分解，则可直接写出不等式的解集.

对点演练1

[2025·延庆期末] 不等式$\dfrac{2x+1}{x-2}\leqslant 1$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty,-3]$　　　　B. $[-3,2]$

C. $[1,2)$　　　　D. $[-3,2)$

角度 2　含参的不等式

例 2 解关于 x 的不等式.

(1)$x^2+ax+1<0(a\in\mathbf{R})$；

(2)$ax^2-(a+1)x+1<0(a\in\mathbf{R})$.

◆◆ **总结反思**

含有参数的不等式的求解,往往需要对参数进行分类讨论.

①若二次项系数为常数,则首先确定二次项系数是否为正数,再考虑分解因式,对参数进行分类讨论,若不易分解因式,则可依据判别式符号进行分类讨论.

②若二次项系数为参数,则应先考虑二次项系数是否为零,确定不等式是不是二次不等式,然后再讨论二次项系数不为零的情形,以便确定解集的形式.

③对方程的根进行讨论,比较大小,以便写出解集.

对点演练2

关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中至多包含 1 个整数,则 a 的取值范围为________.

探究点二　解一元二次不等式恒成立与能成立问题

例 3　已知关于 x 的不等式 $2x-1>m(x^2-1)$.

(1)是否存在实数 m,使不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立?请说明理由.

(2)若不等式对 $m\in[-2,2]$ 恒成立,求实数 x 的取值范围.

(3)若不等式对 $x\in[2,+\infty)$ 有解,求 m 的取值范围.

◆◆ **总结反思**

利用变换主元法解决一元二次不等式在给出参数取值范围情况下的恒成立问题时,一定要搞清谁是变换后的主元,谁是变换后的参数,一般地,知道谁的范围,谁就是变换后的主元,求谁的范围,谁就是变换后的参数.

对点演练3

1. 若命题"$\forall x\in\mathbf{R}, kx^2+2kx-3<0$"为真命题,则 k 的取值范围是(　　)

A. $(-3,0)$　　B. $(-3,0]$

C. $(-3,1)$　　D. $(3,+\infty)$

2. 若存在 $x\in[0,1]$,使得 $x^2+(1-a)x+3-a>0$ 成立,则实数 a 的取值范围是________.